Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: problemas resueltos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

4. Problemas resueltos

4.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ejercicio 4.1. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.*

A. VARIABLES SEPARADAS

b) $(1+e^x)yy' = e^x$. *Hallar la solución que pasa por* $(0,1)$.

B. HOMOGÉNEAS

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x}$, $y(1)=1$.

C. LINEALES

h) $xy' + 4y = x^3 - x$.

D. DIFERENCIALES EXACTAS

e) $(x^3+xy^2)\,dx + (x^2y+y^3)\,dy = 0$.

RESOLUCIÓN.

A. VARIABLES SEPARADAS

b) En primer lugar buscamos la solución general de la ecuación diferencial. Separando las variables e integrando,

$$(1+e^x)y\,dy = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)+c,$$

de donde obtenemos

$$y^2 = 2\ln(1+e^x)+C \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{2\ln(1+e^x)+C}.$$

Para obtener la solución que particular que pasa por $(0,1)$ consideramos la solución positiva de la ecuación diferencial, esto es, $y=\sqrt{2\ln(1+e^x)+C}$. Como ésta ha de pasar por $(0,1)$, se debe tener $y(0)=1$. Por tanto:

$$y(0)=\sqrt{2\ln(1+e^0)+C}=1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\ln 2+C}=1 \quad \Rightarrow \quad 2\ln 2+C=1$$
$$\Rightarrow \quad C = 1-2\ln 2.$$

Luego, la solución particular buscada viene dada por:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{2\ln(1+e^x)+1-2\ln 2} \quad &\Rightarrow \quad y = \sqrt{2[\ln(1+e^x)-\ln 2]+1} \\ &\Rightarrow \quad y = \sqrt{1+2\ln\frac{1+e^x}{2}}. \end{aligned}$$

B. HOMOGÉNEAS

d) Nótese que la ecuación diferencial puede ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}.$$

Haciendo el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$ ó, lo que es lo mismo, $y = xz$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx}.$$

Encontramos así que

$$\begin{aligned} z + x\,\frac{dz}{dx} = 1 - z \quad &\Rightarrow \quad x\,\frac{dz}{dx} = 1-2z & &\Rightarrow \quad \frac{dz}{1-2z} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{(-2)}{1-2z}\,dz = \frac{dx}{x} & &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(1-2z) = \ln x + c \\ &\Rightarrow \quad \ln(1-2z)^{-\frac{1}{2}} = \ln x + \ln C & &\Rightarrow \quad \ln(1-2z)^{-\frac{1}{2}} = \ln Cx \\ &\Rightarrow \quad (1-2z)^{-\frac{1}{2}} = Cx & &\Rightarrow \quad (1-2z) = Cx^{-2} \\ &\Rightarrow \quad 2z = 1 - \frac{C}{x^2} & &\Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} - \frac{C}{x^2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{2} - \frac{C}{x^2} & &\Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} - \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Calculamos ahora la solución particular que verifica $y(1) = 1$:

$$y(1) = \frac{1}{2} - C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto, la solución particular buscada viene dada por

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}.$$

C. LINEALES

h) Dividiendo por x ambos miembros de la ecuación diferencial resulta

$$y' + \frac{4}{x}\, y = x^2 - 1.$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante $e^{\int \frac{4}{x}\,dx} = e^{4\ln x} = e^{\ln x^4} = x^4$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} x^4y' + 4x^3y = x^6 - x^4 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(x^4y) = x^6 - x^4 \quad \Rightarrow \quad x^4y = \int (x^6 - x^4)\, dx \\ &\Rightarrow \quad x^4y = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{7} - \frac{x}{5} + \frac{C}{x^4}. \end{aligned}$$

D. DIFERENCIALES EXACTAS

e) Escribiendo $M(x,y) = x^3 + xy^2$ y $N(x,y) = x^2y + y^3$, se cumple que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial (x^3 + xy^2)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial (x^2y + y^3)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Al coincidir ambas expresiones se trata, en efecto, de una ecuación exacta. Por tanto,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\, dx + C(y) = \int (x^3 + xy^2)\, dx + C(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C(y).$$

Para calcular $C(y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x^2y + C'(y) = N(x,y) = x^2y + y^3 \quad \Rightarrow \quad C'(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad C(y) = \frac{y^4}{4} + C.$$

Consecuentemente, la solución general será

$$u(x,y) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C \quad (C \text{ constante}),$$

que podemos reescribir como

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C \quad (C \text{ constante}),$$

o bien

$$(x^2 + y^2)^2 = C \quad (C \text{ constante}).$$

□

4.2. Aplicaciones: problemas de desintegración radiactiva

Ejercicio 4.2. *Inicialmente había* 100 *miligramos de una sustancia radiactiva. Después de* 6 *horas su masa disminuyó en un* 3 %*. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de* 24 *horas.*

RESOLUCIÓN. Inicialmente tenemos 100 mg de sustancia radiactiva. Si $C(t)$ denota la cantidad de sustancia radiactiva en el instante t, sabemos que al cabo de $t = 6$ h quedan

$$C(6) = 100 - 3 = 97 \text{ gr}$$

de esta sustancia. La rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, esto es:

$$\frac{dC}{dt} = kC,$$

siendo k la constante de proporcionalidad. Como vimos en el desarrollo teórico, tal ecuación admite por solución $C(t) = A\,e^{kt}$, donde A y k son constantes a determinar. Puesto que en el instante inicial $t = 0$ contamos con 100 mg de sustancia,

$$C(0) = A\,e^0 = 100 \quad \Rightarrow \quad A = 100.$$

En el instante $t = 6$ quedan 97 gr; luego,

$$C(6) = 100\,e^{6k} = 97 \quad \Rightarrow \quad e^{6k} = \frac{97}{100} \quad \Rightarrow \quad 6k = \ln\frac{97}{100} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{6}\ln\frac{97}{100}.$$

En conclusión, la cantidad de sustancia radiactiva en el instante t es

$$C(t) = 100\,e^{\frac{t}{6}\ln\frac{97}{100}}.$$

Por tanto, la cantidad remanente transcurridas 24 h es

$$C(24) = 100\,e^{\frac{24}{6}\ln\frac{97}{100}} = 100\,e^{4\ln\frac{97}{100}} = 100\,e^{-0.12} \simeq 88.5 \text{ mg}.$$

□

4.3. Aplicaciones: problemas de mezclas

Ejercicio 4.3. *Un tanque está lleno de* 100 *litros de agua en los que se ha disuelto* 20 *kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene* 1 *kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de* 7 *litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de* 8 *litros por minuto. Determinar la función que da la cantidad de sal en cada instante. ¿Se vaciará totalmente el tanque?*

RESOLUCIÓN. Conforme a la notación utilizada en el desarrollo teórico, el enunciado del problema proporciona los siguientes datos:

$$A = 20 \text{ kg}, \quad a = 1 \text{ kg/L},$$
$$V_0 = 100 \text{ L}, \quad v_1 = 7 \text{ L/min}, \quad v_2 = 8 \text{ L/min}.$$

Por tanto, la ecuación diferencial que modeliza la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante viene dada por

$$y'(t) + \frac{8}{100+(7-8)t}\, y(t) = 7 \cdot 1,$$

esto es,

$$y'(t) + \frac{8}{100-t}\, y(t) = 7.$$

La ecuación anterior admite como factor integrante

$$e^{\int \frac{8}{100-t}\,dt} = e^{-8\int \frac{-1}{100-t}\,dt} = e^{-8\ln(100-t)} = e^{\ln(100-t)^{-8}} = \frac{1}{(100-t)^8}.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el factor integrante,

$$\frac{1}{(100-t)^8}\, y'(t) + \frac{8}{(100-t)^9}\, y(t) = \frac{7}{(100-t)^8},$$

es decir:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(100-t)^8}\, y(t)\right] = \frac{7}{(100-t)^8}.$$

Integrando la expresión anterior,

$$\frac{1}{(100-t)^8}\, y(t) = \int \frac{7}{(100-t)^8}\,dt = (-7)\int \frac{-1}{(100-t)^8}\,dt = \frac{1}{(100-t)^7} + C,$$

de modo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = (100-t) + (100-t)^8\, C = (100-t) + 100^8 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^8 C.$$

Para hallar C tenemos en cuenta que la concentración inicial es $A = 20$:

$$A = y(0) = 20 \quad \Rightarrow \quad 20 = 100 + 100^8\, C \quad \Rightarrow \quad 100^8\, C = -80.$$

En conclusión, la cantidad de sal presente en el tanque en cada instante es

$$y(t) = (100-t) - 80\left(1 - \frac{t}{100}\right)^8.$$

Para averiguar si el tanque se vaciará totalmente, determinaremos el tiempo en que la concentración se anula, esto es:

$$y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (100-t) - 80\left(1 - \frac{t}{100}\right)^8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (100-t)\left[1 - 80\,\frac{(100-t)^7}{100^8}\right] = 0.$$

La ecuación anterior admite dos soluciones:

$$100 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 100 \text{ min};$$

$$1 - 80\,\frac{(100-t)^7}{100^8} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{100^8}{80} = (100-t)^7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[7]{\frac{100^8}{80}} = 100 - t$$

$$\Rightarrow \quad t = 100 - \sqrt[7]{\frac{100^8}{80}} \simeq 100 - 103.23 = -3.23 \text{ min}.$$

La solución negativa carece de sentido en el contexto del problema. Por tanto, la concentración es cero para $t = 100$ min, que es cuando se vaciará el tanque.

Nótese que aunque éste se vacíe siempre seguirá entrando agua salada, de manera que a partir del instante $t = 100$ min la concentración de sal en cada instante será la de la mezcla entrante, a saber, 1 kg/L. □

4.4. Aplicaciones: problemas de temperatura

Ejercicio 4.4. *Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20 °C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo.*

Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los 90 °C, si se sabe que su temperatura aumentó 2 °C en un segundo. ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los 98 °C?

RESOLUCIÓN. La Ley de Newton expresa que la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente. La ecuación diferencial que modeliza dicho fenómeno es $T'(t) = K[T(t) - T_a]$, cuya solución general (veáse el desarrollo teórico) es

$$T(t) = T_a + Ce^{Kt}.$$

La temperatura ambiente en este caso es $T_a = 100$, mientras que la temperatura inicial es $T(0) = 20$. Por tanto,

$$T(0) = 100 + Ce^{K\cdot 0} = 100 + C = 20 \quad \Rightarrow \quad C = -80.$$

Como la temperatura aumentó 2 °C en 1 s encontramos que $T(1) = 22$. Así,

$$T(1) = 100 - 80\, e^{K} = 22 \quad \Rightarrow \quad 78 = 80\, e^{K} \quad \Rightarrow \quad K = \ln\frac{78}{80}.$$

Por tanto, la temperatura en cualquier instante t es

$$T(t) = 100 - 80\, e^{t\ln\frac{78}{80}}.$$

Para calcular el tiempo que tarda la barra en alcanzar 90 °C resolvemos la ecuación $T(t) = 90$:

$$\begin{aligned} 100 - 80\, e^{t\ln\frac{78}{80}} = 90 \quad &\Rightarrow \quad 10 = 80\, e^{t\ln\frac{78}{80}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8} = e^{t\ln\frac{78}{80}} \\ &\Rightarrow \quad t = \frac{\ln\frac{1}{8}}{\ln\frac{78}{80}} \simeq 82.1 \text{ s.} \end{aligned}$$

Similarmente, para calcular el tiempo que tarda en alcanzar 98 °C resolvemos la ecuación $T(t) = 98$:

$$\begin{aligned} 100 - 80\, e^{t\ln\frac{78}{80}} = 98 \quad &\Rightarrow \quad 2 = 80\, e^{t\ln\frac{78}{80}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{40} = e^{t\ln\frac{78}{80}} \\ &\Rightarrow \quad t = \frac{\ln\frac{1}{40}}{\ln\frac{78}{80}} \simeq 145.7 \text{ s.} \end{aligned}$$

□

4.5. Aplicaciones: miscelánea

Ejercicio 4.5. *La rapidez con que cierto medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial*

$$\frac{dX}{dt} = A - BX, \quad X(0) = 0,$$

donde A y B son constantes positivas. La función $X(t)$ describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera t. Encontrar el valor límite de X cuando $t \to \infty$. ¿Cuánto tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

RESOLUCIÓN. La ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = A - BX, \quad X(0) = 0,$$

es de variable separada (nótese que también es de tipo lineal). Resolvemos por el procedimiento habitual:

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{A-BX} = dt \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dX}{A-BX} = \int dt \quad &&\Rightarrow \quad -\frac{1}{B}\int \frac{(-B)}{A-BX}\, dX = \int dt \\
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{B}\ln(A-BX) = t + C \quad &&\Rightarrow \quad \ln(A-BX) = -Bt + C \\
&\Rightarrow \quad A - BX = e^{-Bt+C} \quad &&\Rightarrow \quad BX = A - Ke^{-Bt} \\
&\Rightarrow \quad X = \frac{A}{B} - Ke^{-Bt}.
\end{aligned}$$

Ahora imponemos la condición inicial:

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{A}{B} - K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{A}{B}.$$

Por tanto, la concentración en el instante t viene dada por

$$X(t) = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}).$$

El valor límite de $X(t)$ cuando $t \to \infty$ es:

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \frac{A}{B}(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-Bt}) = \frac{A}{B},$$

puesto que la constante B es positiva. Para saber cuánto tiempo se tarda en alcanzar la mitad de ese valor límite,

resolvemos

$$\begin{aligned} X(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{B} \quad &\Rightarrow \quad \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{B} \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-Bt} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad e^{-Bt} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -Bt = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ &\Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{B} \text{ s.} \end{aligned}$$

□